Doğrusal Dönüşümün Matematiği

Yapay Zeka ve Karmaşık Sistemlere
Genel Bir Bakış
Uzay Çetin

25 Mart 2014

İçindekiler

Bölüm 1

Doğrusal Sistemler

Doğrusal sistemler, sistem girdileri ve sistem çıktıları arasında doğrusal ilişkinin bulunduğu, tahmin edilebilir sistemlerdir. Toplam girdinin üreteceği çıktı, girdilerin tek tek üreteceği çıktılarının toplamına eşittir. Doğrusal sistemler açısından bütün, parçaların toplamından farksızdır. Aşağıdaki örnek ve konu anlatımıyla ne demek istediğimi daha iyi anlayacağınıza eminim.

1.1 Dönüşümün Matematiği Fonksiyonlar

Dönüşümün matamatik dilindeki en basit ifadesi fonksiyonlardır. Fonksiyonlar, kendilerine verilen girdileri, özel bir işleme tabi tutarak, çıktılara dönüştürür.

Paranızı farklı bir para birimine çevirmek istediğinizi düşünelim. Temelde bu bir dönüştürme işlemidir. Dolayısıyla buna karşılık gelen bir fonksiyon vardır. Bu fonksiyona para miktarını girerseniz, ilgili döviz kuru ile çarparak, paranızı istediğiniz para birimine dönüştürebilirsiniz. Fonksiyonu $f(x)$ ile gösterelim. YTL'ye çevirmek istediğiniz euro miktarı x olsun. Euro kurunun 3YTL olduğunu varsayarsak, fonksiyonumuz $f(x) = 3 \times x$'tir.

> "Ne makine şu insan be! İçine ekmek, şarap, balık, turp koyuyorsun; iç çekmeleri, gülüşler ve düşler çıkıyor." - *Zorba*, Nikos Kazancakis, syf246.

Karşılaştığınız herhangi bir probleme çözüm bulduğunuzu düşünün. Yaptığınız şey aslında, size verilen problemi alıp, çözüme dönüştürmektir. Bazen bir kitap okuduğunuzda, zihininizde bir dönüşüm yaşarsınız ve hayata bakışınız değişir. Düşünsenize, üzerinde yaşadığımız yer kürede bir zamanlar kara kıtaları bitişik tek bir kıtaydı. O halinden bügünki haline dönüşüverdi. Tabi ki, bir çırpıda olmadı bu. *Zorba* gibi ben de hayret ediyorum, dönüşümün gücüne. Dönüşüme tüm evren tabi. Dönüşümün bütünleştirici olduğuna inanıyorum. Büyük bir bütünün parçası olduğumuzu hatırlatıyor, bize. İnanıyorum ki, hiç bir şey kaybolmuyor, yok olmuyor, dönüşüyor sadece.

1.1.1 Doğrusal Dönüşümler

İlk bakışta anlaşılması zor bir problemi, parçalarına ayırıp, küçük problemlere verdiğimiz cevaplarla, problemin bütününü çözebiliriz. Böl-parçala-yönet yaklaşımı doğrusal sistemler için kusursuz çalışır. Çünkü doğrusal sistemlerde,"bütün parçaların toplamıdır". Bu bölümde, doğrusal sistemler çerçevesinde fonksiyonlara göz atacağız. Yoksa tabi ki, bunların dışında kocaman bir doğrusal olmayan dünya var. Ve o dünyada "Bütün parçaların toplamından fazladır". Büyük yolculuklara küçük adımlarla başlanır. Bizim de şu anki küçük adımımız "Doğrusal Sistemler". Kim bilir belki uslu bir çocuk olursak, bir gün "Doğrusal Olmayan Sistemleri" de görebiliriz.

Doğrusal bir sistemi anlamanın en iyi yolu onu parçalara indirgeyerek incelemektir. Büyük bir problemi, farklı sayıdaki küçük problemlerin toplamı şeklinde ifade edebiliriz. Daha matematiksel bir ifade ile,

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

Burada x büyük problemi, x_1 ve x_2 daha küçük problemleri temsil ediyor. α_1 ve α_2 ise daha küçük problemlerin katsayılarıdır. Başta söylediğim gibi, bir problemi çözmek, aslında "problem"i alıp onu "çözüm"e dönüştürmektir. Problemimiz x'in çözümü olan olan $f(x)$'i bulmak için daha küçük problemlerin çözümleri olan $f(x_1)$ ve $f(x_2)$'den yararlanacağız. Bu konuda bize doğrusal dönüşümler yardımcı olacak. Şimdilik, $\alpha_1 = 1$ ve $\alpha_2 = 1$ kabul ederek, katsayılarımızı unutalım. Doğrusal dönüşüm, en basit şekliyle, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Yani, bütünü çözmek, bütünü meydana getiren parçaların çözümlerini birleştirerek yapılabilir. Burda bütün $x = x_1 + x_2$, parçalar x_1 ve x_2'dir. Bütünü çözmek $f(x_1+x_2)$'i bulmak anlamına gelir. Bu iş, parçaların çözümlerini,$f(x_1)$ ve $f(x_2)$'yi, toplayarak yapılabilir. Şimdi bir dakika düşünün, $x_2 = x_1$ ise ne olur?

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(\underbrace{x_1 + x_1}_{2x_1}) \\ &= f(x_1) + f(x_1) \\ &= 2f(x_1) \end{aligned}$$

$f(x_1 + x_1) = f(2x_1)$ olduğuna göre, demek ki, $f(2x_1) = 2f(x_1)$'dir. Burdan varabileceğimiz çıkarımı görebiliyor musunuz? Peki o zaman, $x_2 = 2x_1$ ise ne olur?

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f(\underbrace{x_1 + 2x_1}_{3x_1}) \\ &= f(x_1) + f(2x_1) \\ &= f(x_1) + 2f(x_1) \\ &= 3f(x_1) \end{aligned}$$

Varılacak sonuç artık daha açık sanırım.

$$f(\alpha x_1) = \alpha f(x_1)$$

Yukarıdaki büyük problemimiz $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$'i hatırladınız mı? Artık onun çözümünü biliyoruz.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= f(\alpha_1 x_1) + f(\alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \end{aligned}$$

Buraya kadar yazılanlar kafanızı karıştırdıysa aşağıdaki basit örnek, her şeyi anlamanızı sağlayacak, inanın bana. Soyut kavramlar, somutlaştırıldığında ne kadar da basitleşiyor, değil mi?

Problem Diyelim ki, bir arkadaşınızla Avrupa'da seyehattesiniz. Her şey size yabancı. Birden susadığınızı ve acıktığınızı fark ediyorsunuz. Siz 1 sandviç ve 1 su almaya karar veriyorsunuz. Arkadaşınız biraz obur ve suyun yanında 2 sandviç yemek istiyor. Markette suyun 2 euro, sandiviçin ise 4 euro olduğunu görüyorsunuz. Acaba, toplamda 2 su ve 3 sandviç için Türk lirası cinsinden ödeyeceğiniz para ne kadar?

Çözüm Sorunun cevabını kafadan bir çırpıda bulduğunuza eminim. $x_1 = 2$ suyun euro cinsinden değeri, $x_2 = 4$ ise sandviçin euro cinsinden değerdir. Sizden istenen, $x = 2x_1 + 3x_2$ için $f(x)$'i bulmanızdır. Biz bunu iki farklı yolla yapacağız.

1.yol "bütünü (parçaların toplamını)" çözmek

$$\begin{aligned} x &= 2x_1 + 3x_2 \\ &= 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Toplamda ödenmesi gereken para, 16 euro'dur. Bunu YTL'ye çevirmek, bütünü çözmek anlamına gelir.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(16) \\ &= 3 \times 16 \\ &= 48 \end{aligned}$$

2.yol "parçaların çözümünü" toplamak

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2x_1 + 3x_2) \\ &= 2f(x_1) + 3f(x_2) \end{aligned}$$

Şimdi yapılması gereken, ayrı ayrı 2 suyun kaç YTL olduğunu ve 3 sandviçin kaç YTL olduğunu bulmak.

$$\begin{aligned} 2f(x_1) &= 2f(2) = 2(3 \times 2) = 12 \\ 3f(x_2) &= 3f(4) = 3(3 \times 4) = 36 \end{aligned}$$

Bu durumda, $f(x) = 12 + 36 = 48$ YTL'dir.

1.1.2 Sonuç

Yukarıdaki örnekten çıkarılması gereken en önemli sonuç, doğrusal sistemlerde, "parçaların toplamını" çözmek ile "parçaların çözümünü" toplamak arasında bir fark olmayışıdır. Çünkü doğrusal sistemlerde, bütün parçaların toplamından farksızdır. En genel ifade ile, doğrusal dönüşüm fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n)$$

Yukarıdaki ifade, eğer Lineer Cebir dersi gördüyseniz size tanıdık gelecektir. Hafızanızı yoklayın, vektör çarpımı diye bir şey vardı, neydi o? En önemlisi de, o ünlü filmdeki gibi, **Matris nedir?** Bu konuyu da bir sonraki yazıda incelemek üzere...