Bilimin gizemli sayısı: e

Yapay Zeka ve Karmaşık Sistemlere
Genel Bir Bakış

Uzay Çetin

23 Ocak 2016

İçindekiler

Bölüm 1

Matematik

"Tanrı varsa, kesinlikle büyük bir matematikçidir." *Paul Dirac.*

Matematik doğada gerçekten var mıdır? Yoksa insan zihninin bir ürünü müdür? Bu soruya cevap vermek zor. Ama bu yazıda anlatacaklarımızla cevaba yaklaşacağımızı düşünüyorum.

1.1 Bilimin gizemli sayısı: e

Birbiriyle alakasız gibi görünen bilim dalları arasındaki bağlar beni hep etkilemiştir. Örneğin herhangi bir niceliğin "büyüme" problemini ele alalım. Diyelim ki, bir kap içerisinde yeterince kaynağa sahip bir bakteri nüfusunu inceliyoruz. Gözlemlerimize göre, bakteri nüfusu artış gösteriyor. Acaba nüfusun zamana göre değişimini matematiksel olarak nasıl modelleyebiliriz? Ya da bir banka müşterisinin, yatırdığı paraya karşılık, belirli bir süre için aldığı faizi düşünelim. Birikimin zamana göre değişimini matematiksel olarak nasıl modelleyebiliriz?

Bu modelleme çalışması sonucunda gizemli bir sabit sayı ile karşılaşacağız. Ve bu sayı evrendeki tüm hareketi, değişimi ve dönüşümü anlamamıza yardımcı olacak. Burada bir parantez açıp size şunu sormak istiyorum. Bu kadar önemli bir sayıyı, sizce canlı nüfusunun değişimini inceleyen biyologlar mı bulmuştur, yoksa bileşik faizin özelliklerini incelemek isteyen ekonomistler mi? Hayır bilemediniz. Bulan kişi, $1, 2, 3, \cdots$ şeklindeki artimetik diziler ile $r^1, r^2, r^3, \cdots$ şeklindeki geometrik diziler arasındaki ilişkiyi inceleyerek, logaritmayı keşfeden matematikçi John Napier'dir. Unutmamak gerekir ki, bilgisayarlardan önce, büyük ve zor hesaplamalama işlemleri ancak logaritma yardımı ile yapılabiliyordu. 1600'lü yılların başında, John Napier e sabitiyle karşılaşan ilk kişi oldu. 1600'lü yılların sonuna doğru, Jacob Bernoulli bileşik faizi incelerken e sabitiyle tekrar karşılaştı. Şimdi onun serüvenini takip edelim.

Diyelim ki, bir bankaya yıllık %100 faizle 1 birim para yatırdınız. 1 yıl sonunda ne kadar paranız olur? Gayet basit, 2 birim paranız olacaktır. Bankanın size sunduğu bir diğer şeçenekte ise, yatırdığınız para üzerinden 6 ay sonunda %50 faiz almanızdır. Bu durumda, paranızı 6 aylık dilimlerle iki kez bankaya yatırabilirsiniz. Şimdi hesap etmeniz gereken, ilk seçeneğin mi, yoksa ikinci seçeneğin mi daha karlı olacağıdır? Hesaba başlamadan önce şunu söyleyelim, bileşik faiz hesabında, önceki anapara ve faiz toplamı yeni anaparayı oluşturur. Ve faiz bu yeni toplam üzerinden hesaplanır. Bu şekilde birinci dönemden sonra faize de faiz ödenir. Dolayıyısıyla, ikinci seçeneğin daha karlı olmasını bekliyoruz. Şimdi hesabı yapalım.

İlk 6 ayın sonunda, $1+1\times\frac{1}{2} = 1.5$ birim paramız olacaktır. İkinci 6 ayın sonunda ise, $1.5+1.5\times\frac{1}{2} = 1.5\times(1+\frac{1}{2}) = 2.25$ birim paramız olur. 1 yıllık %100 faiz oranı paramızı 2 katına çıkarırken, 6 aylık %50 faiz oranı paramızı bir yıl sonunda 2.25 katına çıkarmaktadır. Hesaplamadan söyleyelim. 3 aylık %25 faiz oranı ile bir yılın sonunda daha da karlı çıkarız. ilk 3 ay sonunda paramız $1+1\times(\frac{1}{4}) = 1.25$ olur. ikinci 3 ay sonunda, 1.25 olan yeni anapara $1.25+1.25\times(\frac{1}{4}) = 1.5625$ olur. Dikkat ederseniz bu para $(1+\frac{1}{4})^2$'e eşittir [1]. Üçüncü 3 ay sonunda paramız $(1+\frac{1}{4})^3$'e çıkar. Dördüncü 3 ay sonunda, yani yıl sonunda paramız $(1+\frac{1}{4})^4 = 2.44$'e çıkar. 3 aylık faizden daha iyi bir şey varsa, o da aylık faizdir. Aylık $\frac{1}{12}$ faiz oranı ile yatırdığımız paranın 1 yıl sonunda ne kadar olacağını hesaplayalım. Yukarıdakine benzer bir mantıkla,

$$1 \to (1+\frac{1}{12})^1 \to (1+\frac{1}{12})^2 \to \cdots \to (1+\frac{1}{12})^{12}$$

1 yılın sonunda $(1+\frac{1}{12})^{12} = 2.61$ birim paramız olacaktır. Peki daha da fazla kar elde etmek için, zamanı daha da küçük parçalara bölersek neler olur. 1 yılı n eşit zaman dilimine ayıralım. Her dilimde yatırdığımız para $\frac{1}{n}$ faiz getiriyor olsun,

$$1 \to (1+\frac{1}{n})^1 \to (1+\frac{1}{n})^2 \to \cdots \to (1+\frac{1}{n})^n$$

1 yılın sonunda $(1+\frac{1}{n})^n$ birim paramız olacaktır. Buraya kadar yaptığımız analiz bize n'i küçülttükçe, yıl sonunda elde edeceğimiz paranın büyüyeceğini söylüyor. Acaba gerçeten öyle mi?

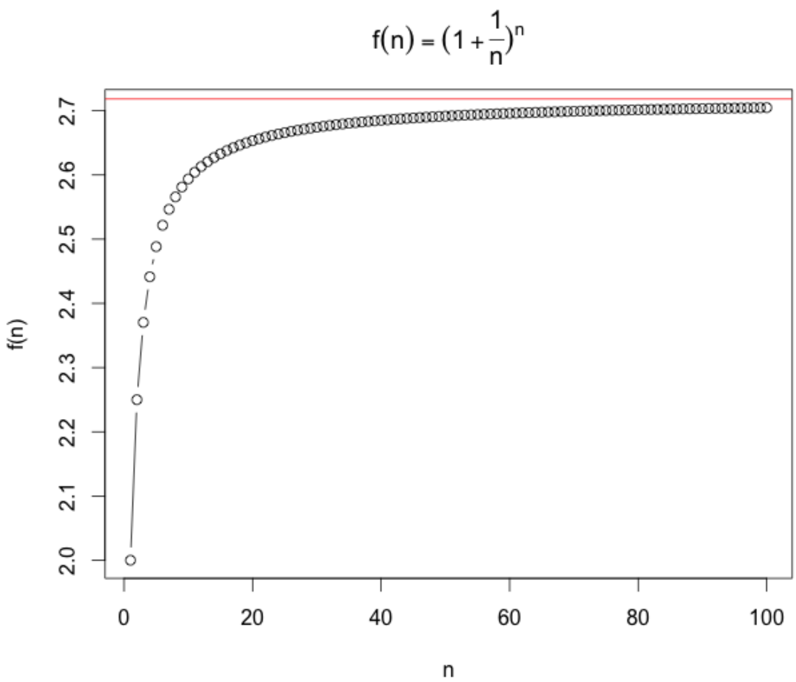
Paramızı bir yılda $n = 24$ kez bankaya yatırırsak, $\frac{360}{24} = 15$ günlük zaman dilimleriyle ve $\frac{1}{24}$ faiz oranı ile yıl sonunda $(1+\frac{1}{n})^n = (1+\frac{1}{24})^{24} = 2.66$ birim para elde ederiz. Dikkat ederseniz, n arttıkça $(1+\frac{1}{n})^n$ azalarak artıyor. Bunu daha iyi anlamak için, faklı n değerleri için $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$'i bir grafik üzerinde inceleyelim. Şekil. 1.1'de, başlarda n arttıkça $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$'in hızlı bir şekilde arttığını fakat belirli bir değerden sonra artış hızında bir yavaşlama olduğunu görüyoruz. Hatta

[1] $1.25+1.25\times(\frac{1}{4}) = 1.25\times(1+\frac{1}{4}) = (1+\frac{1}{4})\times(1+\frac{1}{4}) = (1+\frac{1}{4})^2$

n'in daha da büyük değerleri için, $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$'in sabitlendiğini görüyoruz. Bu sabit sayıya istediğimiz ismi verebilirdik. Fakat matematikçiler, bu sayıya e diyor. Artık $e = 2.71828..$ sayısının varlığını biliyoruz. Ama hemen şunu söyleyelim, dünya üzerinde hiç kimse e'nin tam değerini bilemez. Bilgisayarlarımız, bu rasyonel sayının virgülden sonraki (sonsuz sayıdaki) tüm basamaklarını depolayacak kadar büyük depolama birimlerine sahip değildir.

Kod 1.1: Bileşik Faiz Hesaplama Programı

```
e <- function (n) { (1+1/n)^n}
x = 1:100
y = e(x)
plot(x,y,type="b",
     xlab="n",
     ylab="f(n)",
     main= expression(paste(f(n) == (1+frac(1,n))^n)))
abline(h = 2.71828, col = "red")
```



Şekil 1.1: Bir birim para, getirdiği faizler ile birlikte, yılda n kez, $\frac{1}{n}$ faiz oranı ile arka arkaya bankaya yatırılırsa, 1 yıl sonunda $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$ kadar paramız olur. Bu grafik, farklı n değerleri için $f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$'in alacağı değerleri göstermektedir. Kod. 1.1 ile R dili kullanılarak elde edilmiştir.

Sonuç olarak, n arttıkça $f(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$, adına e dediğimiz ve değerini sadece yaklaşık olarak bilebileceğimiz, bir sayıya ulaşır. Bu ifadeyi matematik dilinde tekrar yazacak olursak,

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \to e$$

Yukarıdaki matematiksel ifadenin korkutucu olmasına aldırış etmeyin, demek istediği oldukça basittir: n değeri artarak sonsuza giderse, $(1 + \frac{1}{n})^n$ de e'ye gider. Bu e'nin birçok tanımından biridir. Dikkat ederseniz, kanıt sunmuş değiliz. Gözleme dayalı tanım yapmış olduk, e'nin tanımını. Matematikçiler, buraya kadar anlattıklarımızla yetinmeyecektir. Onlar böyle bir sayının varlığına dair kanıt ararlar. Diyelim ki, $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ve $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ şeklinde iki dizimiz var.

- a_n dizisinin sürekli arttığını, her n için $a_{n+1} - a_n$ sıfırdan büyük olduğunu kanıtlayarak gösterebiliriz. İzninizle bu kısmı atlıyorum. Ama bir hatırlatmada bulunacağım. Binom açılımı şu şekilde ifade ediliyordu. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Burada $x = \frac{1}{n}$ ve $y = 1$ yazarsak,

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = (\frac{1}{n} + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

- b_n dizisine ait her elemanın 3'ten küçük olduğu gösterilebilir. Biliyoruz ki, $n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$. Bu çarpımda, ilk 1 ve 2 hariç her sayıyı 2 ile yer değiştirirsek, açık bir şekilde $n!$'den daha küçük bir sayı elde ederiz. Bu sayı 2^{n-1}'dir. Demek ki $n! > 2^{n-1}$.

$$b_n = \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

  Her n değeri için $b_n < 3$'tür[2].

- Eğer sürekli artan bir a_n dizisinin her terimi, b_n dizisinden küçükse, $a_n \leq b_n < 3$'tür.

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n \end{aligned}$$

[2] $b_n < 3$ 'ü hesaplarken $r = \frac{1}{2}$ için $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ eşitliğinden faydalandık.

Yukarıdaki tüm bu matematik, Şekil. 1.1'deki gözlemlerimizi doğruluyor. n arttıkça, $(1+\frac{1}{n})^n$ azalarak artıyor fakat 3'ü asla geçmiyor. Eğer e'nin varlığı ve özellikleri ile ilgili daha iyi bir kanıt bulursanız lütfen bana bildirin. Şekil. 1.1'de yatay kırmızı çizgiyle gösterilen $e = 2.71828$'nin değeri gözlerimizin önünde apaçık bir şekilde duruyor. Bilimin bu gizemli sayısı, kendiliğinden ortaya çıkmış gibi duruyor. Matematikçiler, *neden böyle* sorusuna cevap aramazlar. e'nin bu tanımını kabul ederek, diğer alanlarda keşfe çıkarlar. Sonuçta bir yerden başlamak gerekir, değil mi? Matematik yalnızca insan zihninin bir ürünü müdür? Cevap vermek zor. Ama e insan zihninin bir ürünü değil, insan zihninin bir keşfidir.

Peki şu ana kadar ekonomi ve matematik ile fazlaca ilgilendik. Hadi biraz da, biyoloji problemlerine göz atalım. Yeterince kaynağa sahip bir bakteri topluluğunun, $\frac{1}{n}$ zaman aralıklarıyla nüfusunu, öncekine göre $1+\frac{1}{n}$ kadar arttırdığı gözlemleniyor. Acaba bu bakteri topluluğunun nüfusu, n adet gözlem sonunda, ilk değerinin kaç katına ulaşır? Aa, biz bu soruyu az önce çözmemiş miydik?

$$1 \to (1+\frac{1}{n})^1 \to (1+\frac{1}{n})^2 \to \cdots \to (1+\frac{1}{n})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$$

Bu koşullarda, büyük n değerleri için, bakteri nüfusu her geçen zaman dilimiyle, ilk nüfusunun e katına yaklaşır. Fakat o değeri asla geçemez. e'nin keşfi, evreni anlamak isteyen insanlığa çok büyük bir kapı açtı. Biz de, bu ve bundan sonraki yazılarımızla bu kapıyı aralayacağız. Bilimin gizemli sayısına hoş geldiniz.